



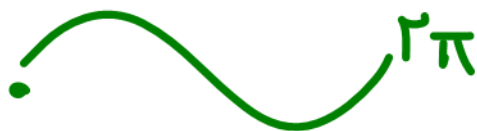
تعمیر ریاضی

ریاضی دوازدهم

فصل ۲



فعالیت



۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \frac{1}{2} \sin x$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2π



فصل ۱
 فصل ۲
 فصل ۳
 فصل ۴
 فصل ۵
 فصل ۶
 فصل ۷
 فصل ۸
 فصل ۹
 فصل ۱۰
 فصل ۱۱
 فصل ۱۲
 فصل ۱۳
 فصل ۱۴
 فصل ۱۵
 فصل ۱۶
 فصل ۱۷
 فصل ۱۸
 فصل ۱۹
 فصل ۲۰
 فصل ۲۱
 فصل ۲۲
 فصل ۲۳
 فصل ۲۴
 فصل ۲۵
 فصل ۲۶
 فصل ۲۷
 فصل ۲۸
 فصل ۲۹
 فصل ۳۰
 فصل ۳۱
 فصل ۳۲
 فصل ۳۳
 فصل ۳۴
 فصل ۳۵
 فصل ۳۶
 فصل ۳۷
 فصل ۳۸
 فصل ۳۹
 فصل ۴۰
 فصل ۴۱
 فصل ۴۲
 فصل ۴۳
 فصل ۴۴
 فصل ۴۵
 فصل ۴۶
 فصل ۴۷
 فصل ۴۸
 فصل ۴۹
 فصل ۵۰
 فصل ۵۱
 فصل ۵۲
 فصل ۵۳
 فصل ۵۴
 فصل ۵۵
 فصل ۵۶
 فصل ۵۷
 فصل ۵۸
 فصل ۵۹
 فصل ۶۰
 فصل ۶۱
 فصل ۶۲
 فصل ۶۳
 فصل ۶۴
 فصل ۶۵
 فصل ۶۶
 فصل ۶۷
 فصل ۶۸
 فصل ۶۹
 فصل ۷۰
 فصل ۷۱
 فصل ۷۲
 فصل ۷۳
 فصل ۷۴
 فصل ۷۵
 فصل ۷۶
 فصل ۷۷
 فصل ۷۸
 فصل ۷۹
 فصل ۸۰
 فصل ۸۱
 فصل ۸۲
 فصل ۸۳
 فصل ۸۴
 فصل ۸۵
 فصل ۸۶
 فصل ۸۷
 فصل ۸۸
 فصل ۸۹
 فصل ۹۰
 فصل ۹۱
 فصل ۹۲
 فصل ۹۳
 فصل ۹۴
 فصل ۹۵
 فصل ۹۶
 فصل ۹۷
 فصل ۹۸
 فصل ۹۹
 فصل ۱۰۰

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$\delta \sin 2x$		۱	-۱	π



صفحه ۱۰۰
 فصل ۱
 تعریف تابع

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin 2x$		۱	-۱	π



الکتریک
مغناطیس
فیزیک
ریاضیات
شیمی
زیست‌شناسی
تاریخ
ادبیات
هنر
علوم



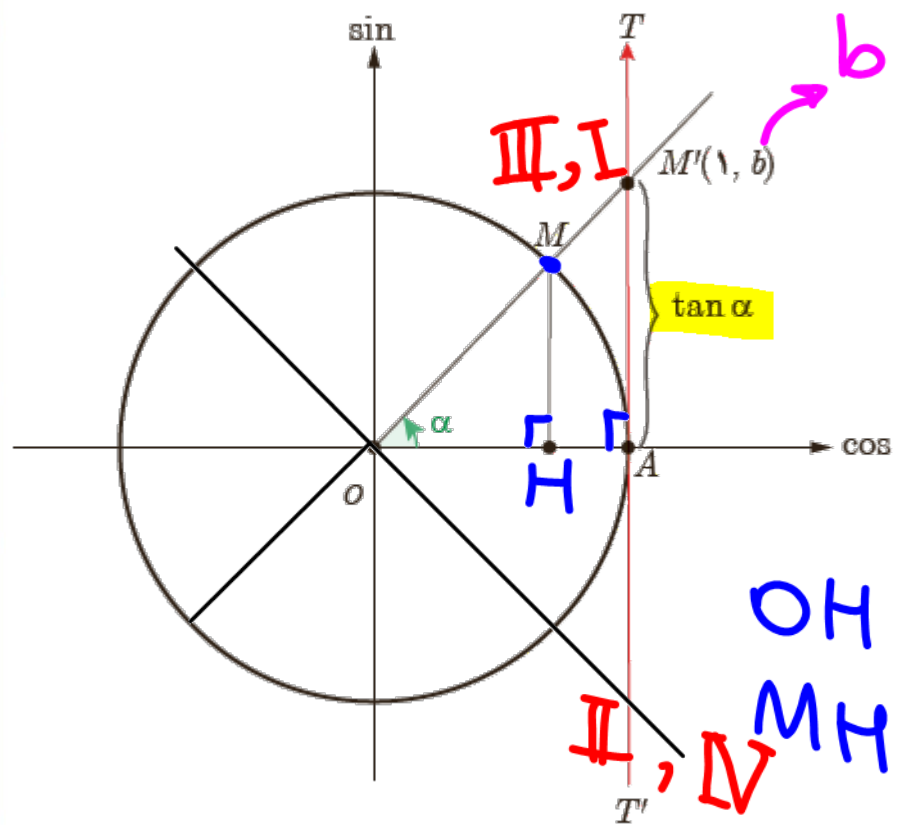
۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب T
$y = \sin(-3x)$		1	-1	$\frac{2\pi}{3}$



صفحه ۲۰
 فصل ۱
 المانهای هندسی
 المانهای جبری
 المانهای عددی
 المانهای هندسی



$b = \tan \alpha$

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. چرا تاثرات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تاثرات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

تالی : $\frac{OH}{OA} = \frac{MH}{AM'}$
 $\frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{AM'}$

$AM' = \tan \alpha$

$OH = \cos \alpha$

$MH = \sin \alpha$

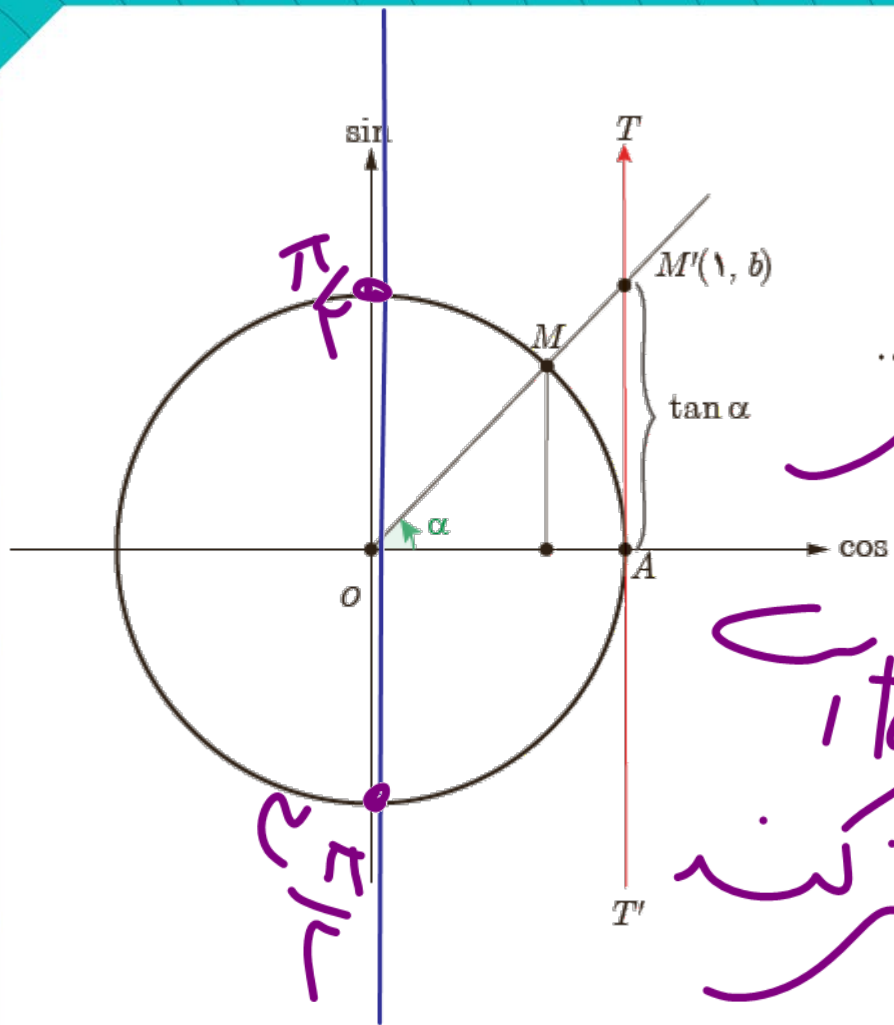


مجموعه‌های مختلف از اشکال هندسی و نمادهای ریاضی در حاشیه راست تصویر.

فعالیت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

پ) آیا $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجه کنید.



شعب زائده

حیر حیر

$\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

موازی گرد \tan

دایره قطع کنند



المنهج العربي

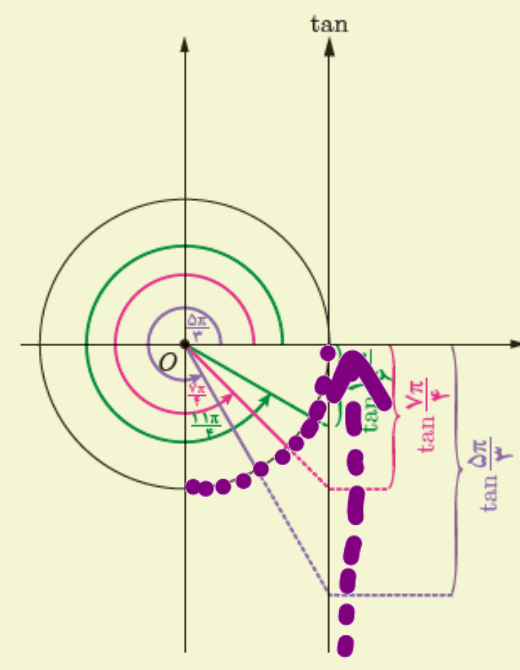
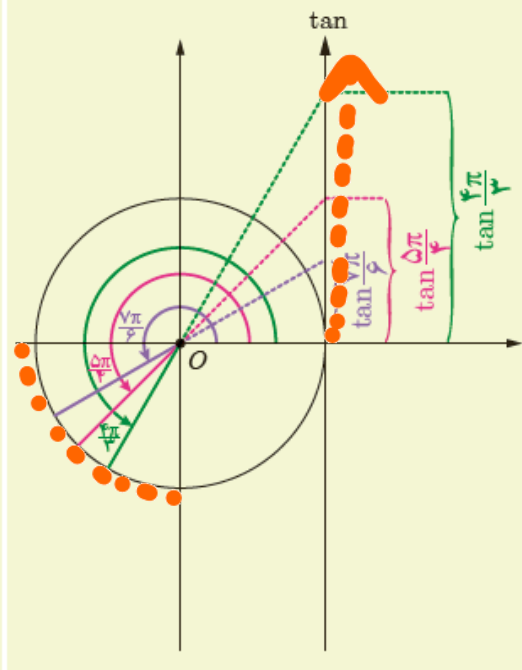
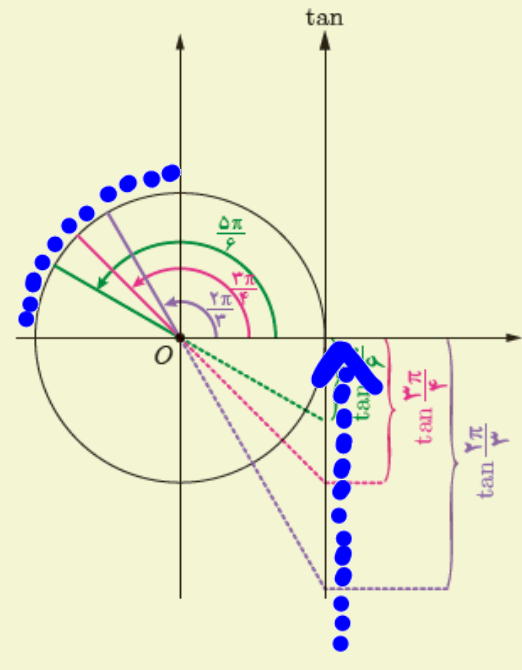
الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟
 ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

دوم $-\infty < \tan < 0$

سوم $0 < \tan < +\infty$

چهارم

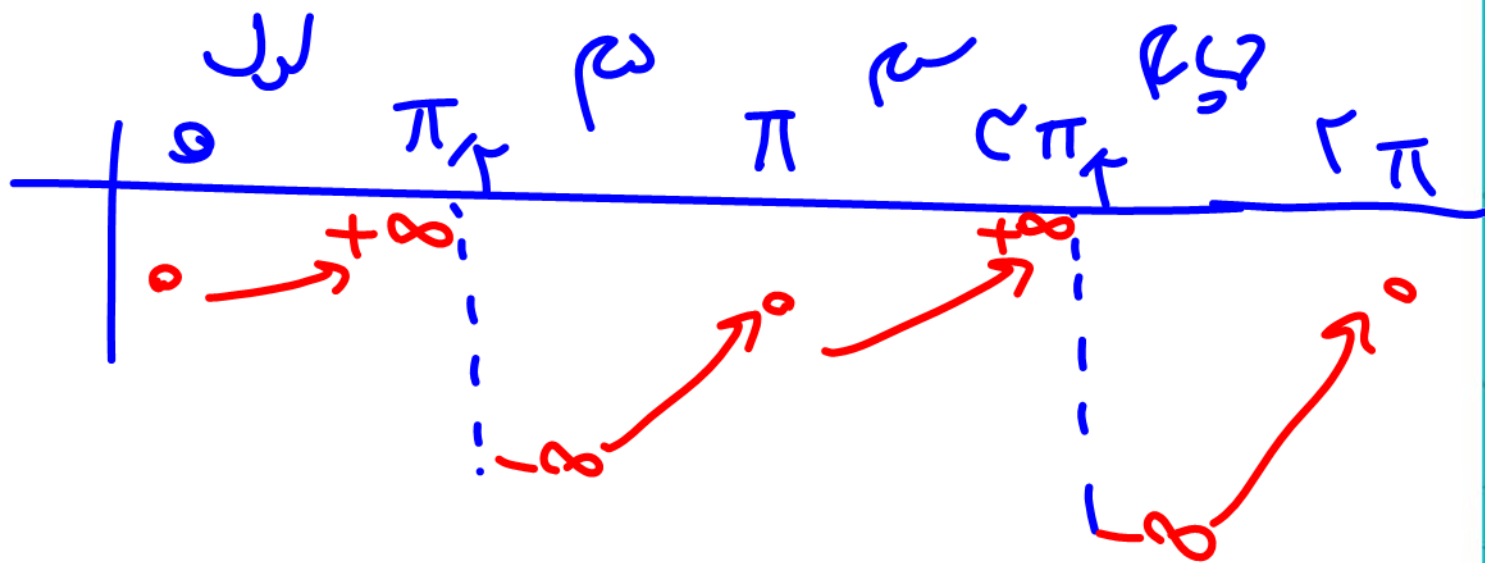
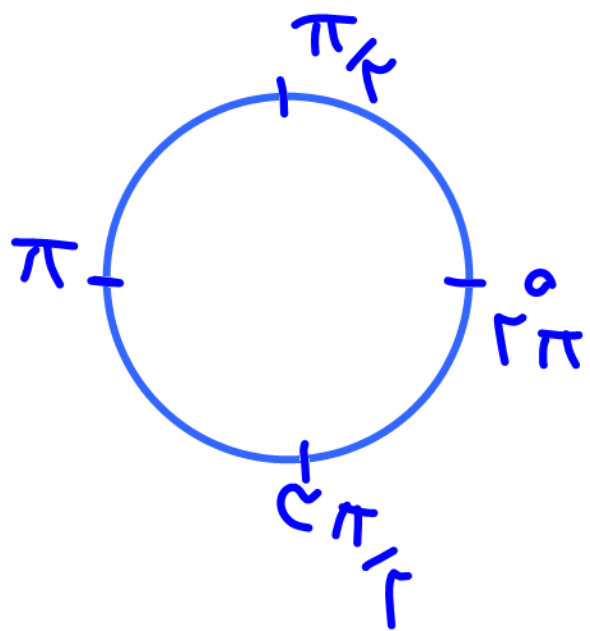
زوايا



المعادن
 الرياضيات
 العلوم
 الفيزياء
 الكيمياء
 الاحياء
 التاريخ
 الجغرافيا
 الفقه
 الفقه
 الفقه



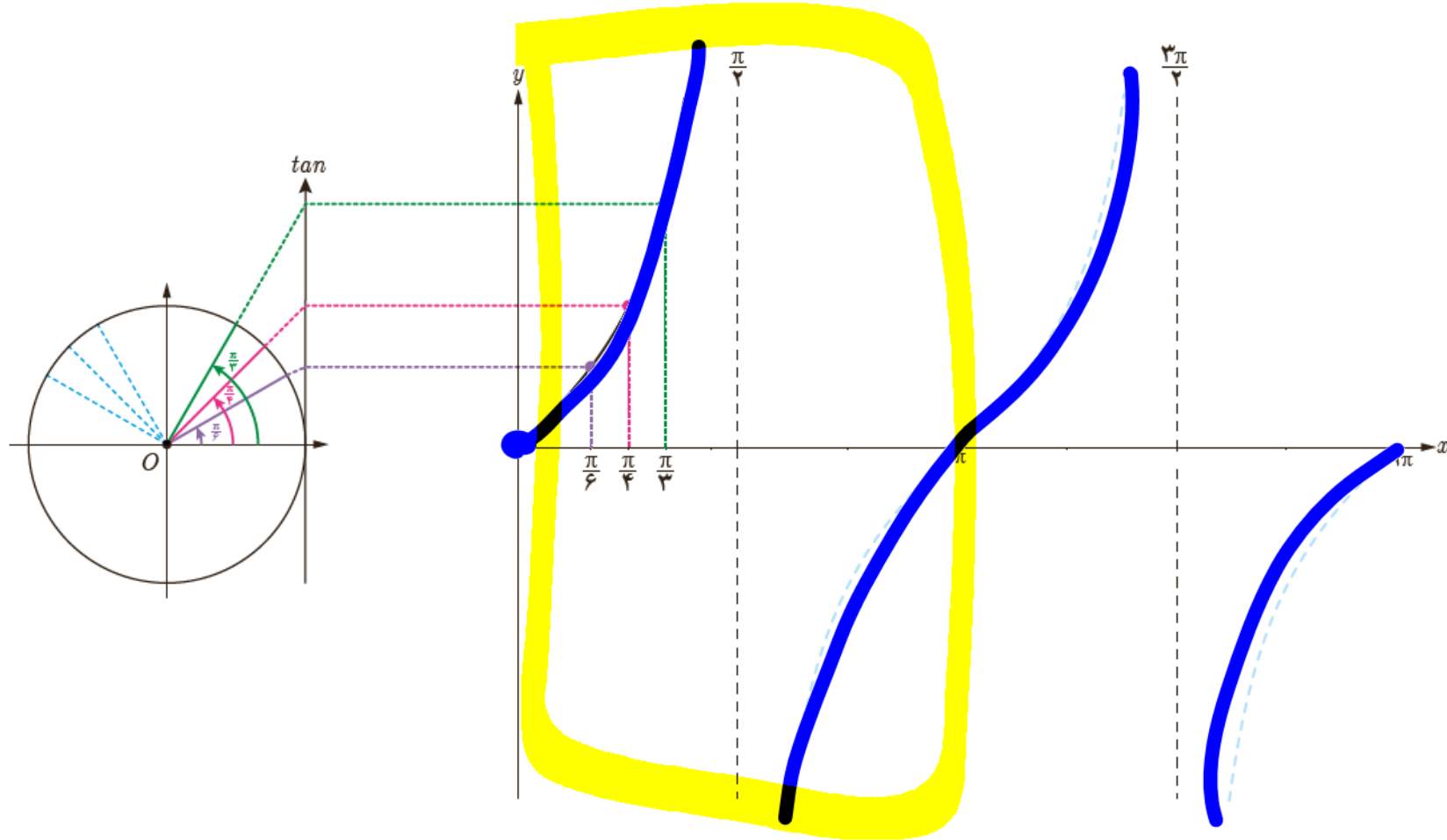
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} - [0, 2\pi]$ بررسی کنید.



الجزيرة العربية

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



الکثره
العدد
الهندسه
الفيزياء
الكيمياء
البيولوجيا
الرياضيات

$$y = a \sin bx + c$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$y_{\max} = |a| + c$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin \sqrt{x}$

$$y_{\max} = |a| + c = 2 + 1 = 3$$

$$y_{\min} = -|a| + c = -2 + 1 = -1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}$$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

پ) $y = -\pi \sin \left(\frac{x}{2}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x + 0$

ب) $y_{\max} = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1$

$y_{\min} = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

ج) $y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$T = \frac{2\pi}{3}$

$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$y_{\max} = \pi - 2$

$y_{\min} = -\pi - 2$



۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

$$c = 1$$

$$a = -1$$

$$y = 1 - \cos 2x \quad \text{ت) ✓✓✓}$$

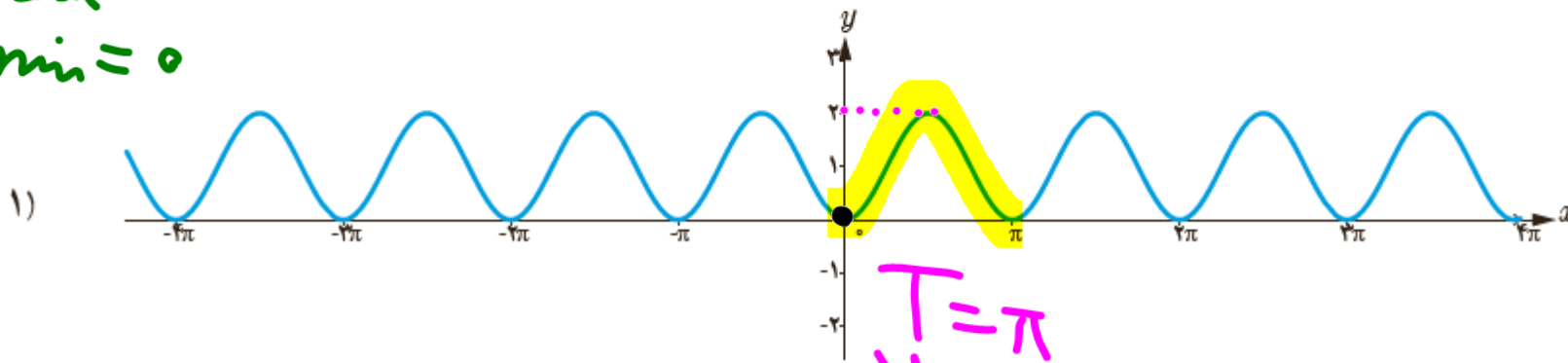
$$y = |\sin 2x| \quad \text{پ) ✓✗}$$

$$y = 2 - \cos \frac{1}{2}x \quad \text{ب)$$

$$y = \sin \pi x \quad \text{الف)$$

$$y_{\max} = 2$$

$$y_{\min} = 0$$



$$T = \pi$$

$$y_{\max} = 2$$

$$y_{\min} = 0$$



الف) $y = \sin \pi x$
 ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$
 پ) $y = |\sin 2x|$
 ت) $y = 1 - \cos 2x$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$ ✓

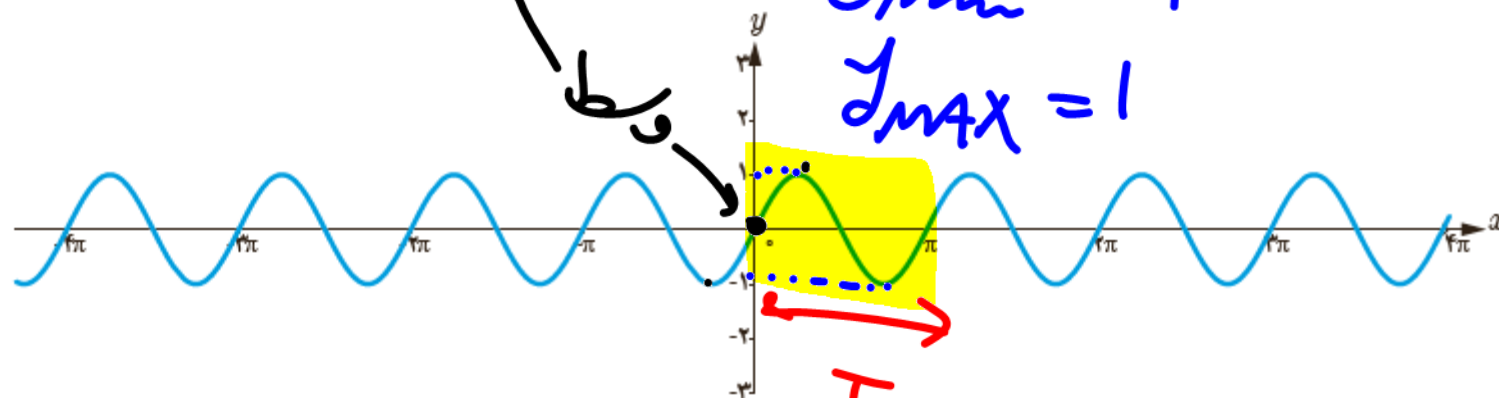
پ) $y = \sin 2x$ ✓✓✓

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$

الف) $y = \sin \pi x$

$y_{\min} = -1$
 $y_{\max} = 1$

۳)



$T = \pi$
 $|b| = 2$



فصل ۲
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$

پ) $y = \sin 2x$

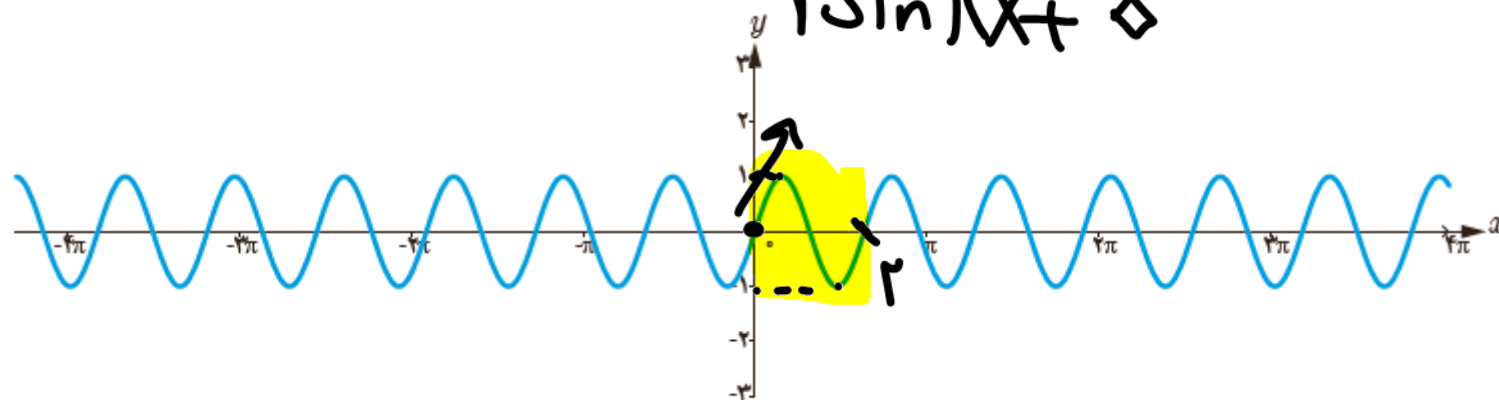
ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$

الف) $y = \sin \pi x$ ✓

$T = 2$

$y = \sin \pi x$ ✓

۴)



الgebra
 Geometrie
 Physik
 Chemie
 Biologie
 Mathematik

۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

$$|b| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

$$\begin{aligned} |a| + c &= -1 \rightarrow 2c = -1 \\ -|a| + c &= -7 \rightarrow c = -2 \\ |a| &= 3 \end{aligned}$$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

$$|b| = 2$$

$$\begin{aligned} |a| + c &= 1 \\ -|a| + c &= -1 \rightarrow c = 0 \\ |a| &= 1 \end{aligned}$$

$$y = \pm 2 \sin \left(\pm \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y = \pm 1 \sin_{\cos} (\pm 2x) + 0$$



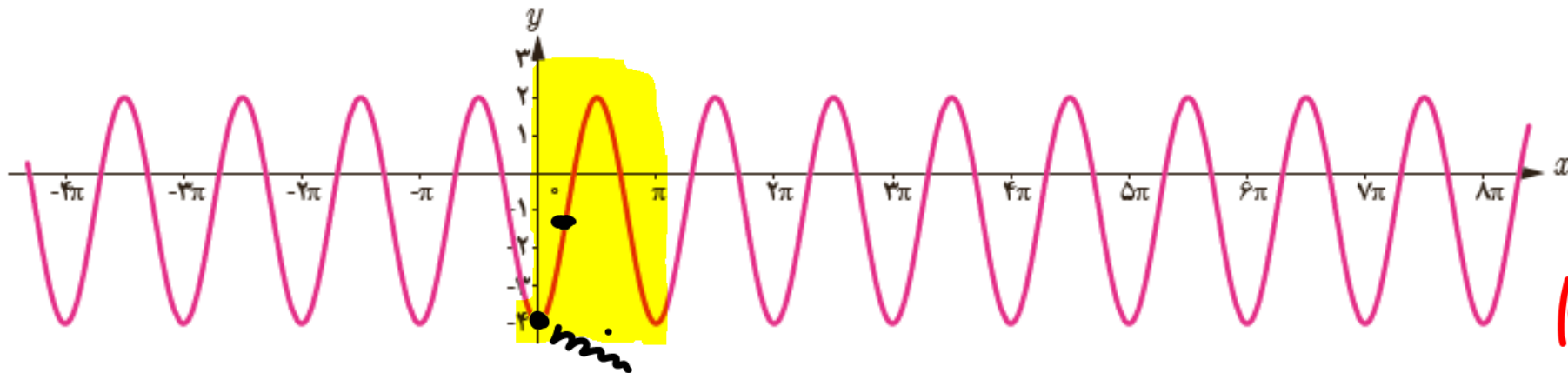
الکتریک
مغناطیس
مکانیک
فیزیک
ریاضیات
شیمی
بیولوژی

$$y = a \cos bx + c = -3 \cos 2x - 1$$

از نوع $\cos - 1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

ب)



$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow b = 2$$

$$y_{\max} = |a| + c = 2 \quad c = -1$$

$$y_{\min} = -|a| + c = -4$$

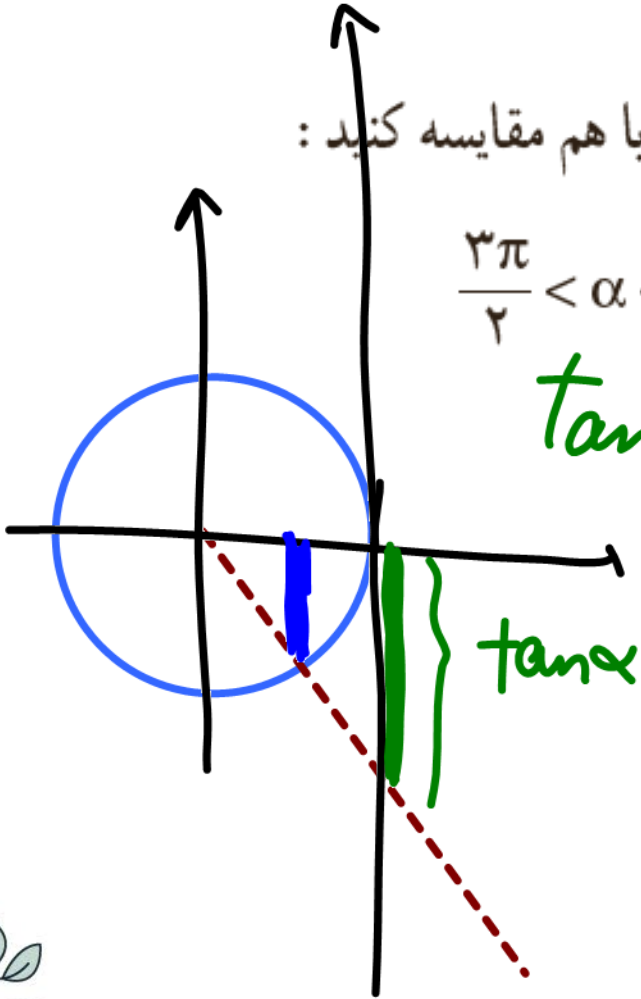


- 1 $\tan > \sin > 0$
- 2 $\sin > \tan$
- 3 $\tan > \sin$
- 4 $\sin > \tan$

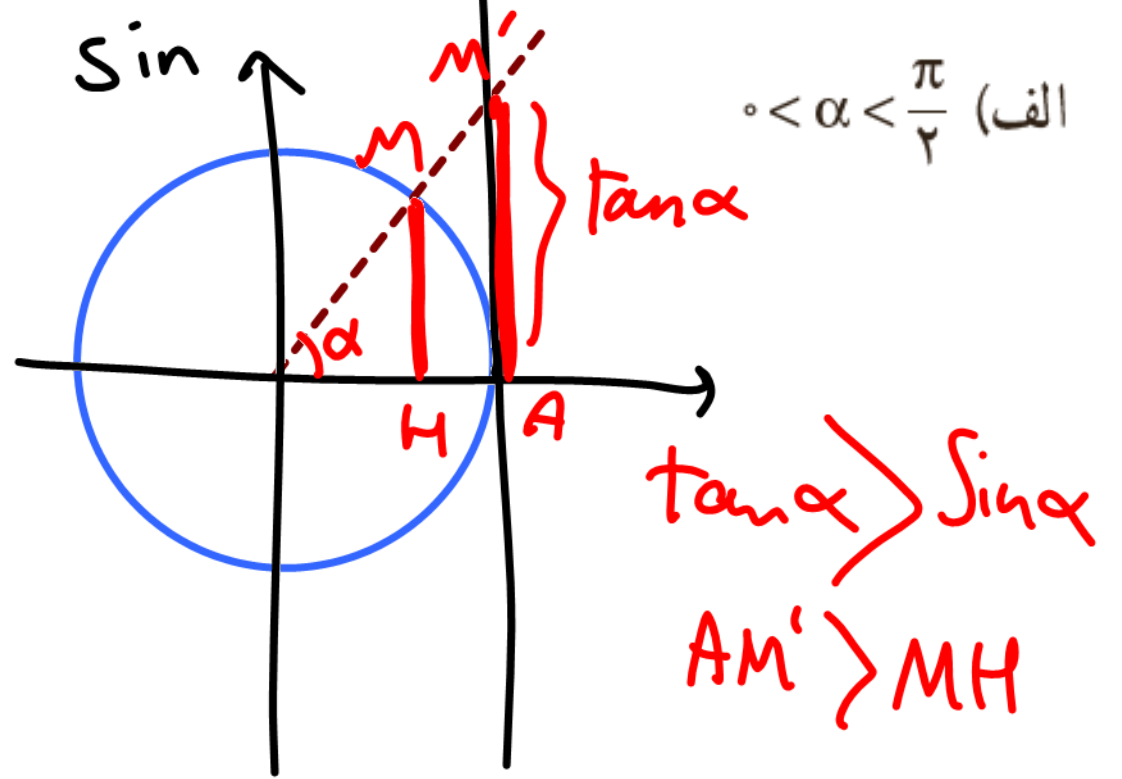
۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$\tan \alpha < \sin \alpha < 0$



الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



مجموعه سوالات و پاسخ‌ها

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $\frac{22}{5}^\circ$ به دست آورید.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$\cos 45^\circ = 2\cos^2 22,5^\circ - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\cos^2 22,5^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22,5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22,5^\circ$$

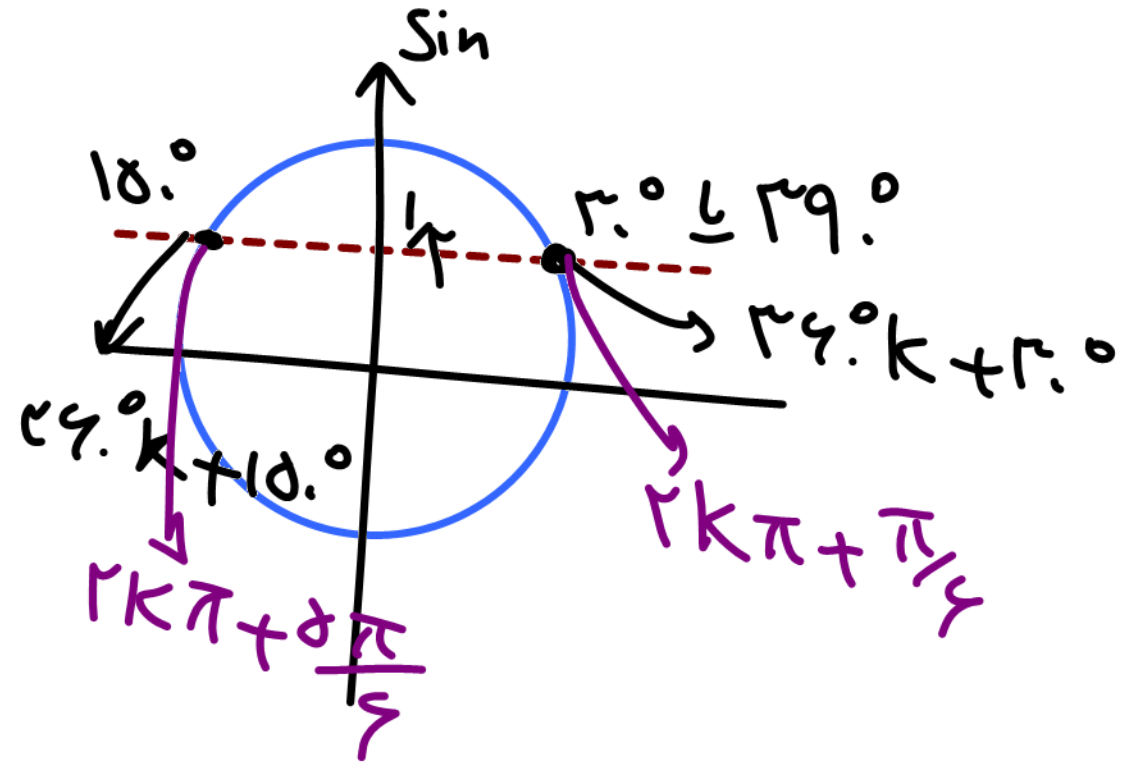
$$2\sin^2 22,5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$



مجموعه‌های مختلف از اشکال هندسی و ریاضیاتی در پس‌زمینه.

	$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$22.5^\circ = \frac{\pi}{8}$
Sin	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$
Tan	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$
Cot	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.



المنهج العربي

تمرین

۳ معادلات زیر را حل کنید.

$$\sin \theta = \sin \Delta$$

$$\begin{cases} \theta = 2k\pi + \Delta \\ \theta = 2k\pi + \pi - \Delta \end{cases}$$

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

∴ $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$$\cos \square = \cos \Delta$$

$$\begin{cases} \square = 2k\pi + \Delta \\ \square = 2k\pi - \Delta \end{cases}$$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$0 = \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4}$$

$\sin x = t \rightarrow t^2 + t - \frac{3}{4} = 0$

$$\rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-\frac{3}{4})}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

① $\sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

② $\sin x = \sin -\frac{\pi}{2}$

معادلات زیر را حل کنید. ۳

$$\begin{aligned} x &= 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x &= 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

$$\sin x - (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

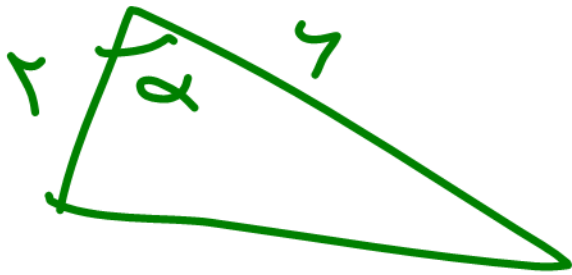
$\sin x = t \rightarrow t^2 + t - 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$



المنهج العربي

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} (2)(6) \sin \alpha$$

$$3 = 6 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ یا } 150^\circ$$

$$\boxed{2}$$



